PUBLICACIONES
DE LA
REVISTA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICO - QUIMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA
SERIE 2.ª TOMO XVI FASCICULO 1.º

VARIEDAD DE RIEMANN TRIANGULABLE DE UN ESPACIO PROYECTIVO

POR

PEDRO ABELLANAS

1961

VARIEDAD DE RIEMANN TRIANGULABLE DE UN ESPACIO PROYECTIVO

por

PEDRO ABELLANAS

1. HIPÓTESIS Y NOTACIONES

a) k_0 es un cuerpo real cerrado.

b) k es el cierre algebraico de k_0. Por consiguiente: $k = k_0(i)$, siendo $i^2 + 1 = 0$ [2]*.

c) $x_1, \ldots, x_n$ son indeterminadas independientes sobre k.

d) $A_0 = k\,[x_1, \ldots, x_n]$, $A_i = k\left[\dfrac{1}{x_i}, \dfrac{x_1}{x_i}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_i}\right]$, $i = 1, \ldots, n$.

e) $K = k\,(x_1, \ldots, x_n)$.

f) Representaremos por X_i, $i = 0, \ldots, n$, al espectro de A_i [1]. En particular, representaremos por X_i^0 al espectro de A_i formado únicamente por los ideales primos de dimensión cero. A los elementos de X_i los representaremos por letras negritas: $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$, ..., con el subíndice i.

g) Al anillo local de $\mathbf{x}_i$ respecto de A_i lo representaremos por $Ai_{\mathbf{x}_i}$ y a su ideal máximo por $M_i\,(\mathbf{x}_i)$.

h) Si $f \in Ai$, a la clase de restos $f + \mathbf{x}_i$ la representaremos por $f(\mathbf{x}_i)$.

2. VARIEDAD DE RIEMANN DE UN ESPACIO PROYECTIVO N-DIMENSIONAL SOBRE K

DEFINICIÓN 1. Llamaremos espacio X, obtenido por recolección de los espacios X_i, al conjunto de todos los elementos, que representaremos por $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ..., obtenidos a partir de los puntos de los espacios X_i, $i = 0, \ldots, n$, mediante la siguiente definición de igualdad:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j \Leftrightarrow Ai_{\mathbf{x}_i} = Aj_{\mathbf{x}_j} \tag{1}$$

En particular representamos por X^0 al espacio obtenido por recolección de los espacios X_i^0, $i = 0, \ldots, n$, mediante la definición (1).

DEFINICIÓN 2. Si $\mathbf{x}$ está formado por los puntos $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \ldots)$ siendo $\mathbf{x}_i \in X_i$, ..., diremos que $\mathbf{x}_i$ es la *proyección* de $\mathbf{x}$ sobre X_i y escribiremos:

$$\mathbf{x}_i = \mathrm{proy}_{\mathbf{x}_i}\,(\mathbf{x})$$

---

* **Los números entre corchetes se refieren a la literatura citada al final del artículo.**

El conjunto formado por las funciones $S_i = \left(\dfrac{1}{x_i}; \dfrac{x_1}{x_i}; \dots, \dfrac{x_n}{x_i}\right)$ forma un sistema de coordenadas de uniformización para X_i. Si existe $\mathbf{x}_i = \operatorname{proy}_{\mathbf{x}_i^0}(\mathbf{x})$ llamaremos coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de S_i a los números de k:

$$\left(\frac{1}{x_i}(\mathbf{x}), \frac{x_1}{x_i}(\mathbf{x}), \dots, \frac{x_n}{x_i}(\mathbf{x})\right)$$

Sea $\mathbf{x}$ un punto de X^0 y sean

$$\frac{x_j}{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{x_j}{x_i}(\mathbf{x}_i) = a_{ji} = a_{ji}' + ia_{ji}''; \frac{1}{x_i}(\mathbf{x}) = a_{0i} = a_{0i}' + ia_{0i}'';$$

$$a_{ji}, a_{0i} \in k; a_{ji}', a_{ji}'', a_{0i}', a_{0i}'' \in k_0; i, j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de S_i.

La aplicación

$$\omega_i: \qquad \mathbf{x} \to (a_{0i}', a_{0i}'', a_{1i}', a_{1i}'', \dots, a_{ni}', a_{ni}'')$$

establece una corespondencia biunívoca entre los puntos de X^0 que poseen proyección sobre X_i^0 y los puntos del espacio afin 2n-dimensional, R_i, sobre k_0.

Se puede obtener una recolección de los espacios R_i mediante la siguiente definición: dos puntos:

$$A_i = (a_{0i}', a_{0i}'', a_{1i}', a_{1i}'', \dots, a_{ni}' a_{ni}'')$$

$$A_j = (b_{0j}', b_{0j}'', b_{1j}', b_{1j}'', \dots, b_{nj}', b_{nj}'')$$

de R_i y R_j, respectivamente, se consideran como iguales cuando existe un punto $\mathbf{x}$ de X^0 tal que

$$\omega_i(\mathbf{x}) = A_i, \qquad \omega_j(\mathbf{x}) = A_j \tag{3}$$

El espacio R obtenido por recolección de los espacios R_i, $i = 0, \dots, n$, mediante la definición (3) se llama variedad de Riemann del espacio proyectivo n— dimensional sobre k, respecto del subcuerpo real cerrado k_0. Si A es un punto de R formado por recolección de los puntos $A_i = A_j = \dots$, de R_i, $R_j \dots$, diremos que A_i es la proyección de A sobre R_i, y escribiremos:

$$A_i = \operatorname{proy}_{R_i} A.$$

De las defiiniciones (1) y (3) resulta el siguiente:

Lema 1. *La correspondencia:*

$$\omega: \quad \mathbf{x} \to A \tag{4}$$

entre X^0 *y* R *definida por*

$$\omega_i(\operatorname{proy}_{X_i} \mathbf{x}) = \operatorname{proy}_{R_i} A, \tag{5}$$

(siendo X_i *un espacio cualquiera, de los* $i = 0, \ldots, n$, *sobre el que existe la proyección de* x) *es una correspondencia biunívoca.*

De la definición (1) se deduce que a cada $x \in X$ le corresponde un anillo local de K, que representaremos por A_x. Al ideal máximo de A_x lo representaremos por M_x.

LEMA 2. *Si* $x, y \in X^0$, *una condición suficiente para que ambos puntos posean proyección sobre un mismo* X_i^0 *es que exista una indeterminada.* x_i, *tal que* $x_i \in A_x$, *y:*

$$x_i \neq 0 \ (M_x), \quad x_i \neq 0 \ (M_y)$$

3. TRIANGULACIÓN DE LA VARIEDAD DE RIEMANN

DEFINICIÓN 3. Si x e y son dos puntos de X^0 tales que existan las proyecciones de ambos sobre X_i^0 y no existan las proyecciones de ambos sobre X_j^0, para $j < i$; $i, j = 0, 1, \ldots, n$, se llama *simplex unidimensional* de vértices A y B, siendo $A = \omega(x)$ y $B = \omega(y)$, y se representa por $[A, B]$, al conjunto de todos los puntos C, de R tales que:

$$\text{proy}_{Ri}\, C = \lambda\, \text{proy}_{Ri}\, A + \mu\, \text{proy}_{Ri}\, B, \ \lambda + \mu = 1; \ \lambda, \mu \in k_0; \ 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (6)$$

Si no existe ningún espacio X_i^0 sobre el que posean proyecciones x e y, no existe ningún simplex de vértices A y B.

LEMA 3. *Si* x *e* y *poseen proyecciones sobre* X_i^0 *todos los puntos del simplex* [x, y] *poseen también proyección sobre* X_i^0, *salvo en el caso en que:* $-1 < b_i'/a_i' = b_i''/a_i'' < 0$.

DEMOSTRACIÓN. — Si i es el menor de los números $0, \ldots, n$ tal que x e y posean proyección sobre X_i^0 el lema es consecuencia inmediata de la definición anterior. Supongamos, por tanto, que no sea éste el caso y que exista un X_l^0, $l < i$, sobre el que tengan proyección x e y. Siempre podemos suponer que $l = 0$, pues, en otro caso bastaría efectuar un cambio de variables evidente. Sea, por tanto,

$$x_j(x) = a_j = a_j' + ia_j'', \ x_j(y) = b_j = b_j' + ib_j'', \quad j = 1, \ldots, n. \quad (7)$$

de donde,

$$\text{proy}_{R0}\, A = (a_1', a_1'', a_2', a_2'', \ldots, a_n', a_n''); \ a_i', a_i'' \in k_0, \ i = 1, \ldots, n.$$
$$\text{proy}_{R0}\, B = (b_1', b_1'', b_2', b_2'', \ldots, b_n', b_n''); \ b_i', b_i'' \in k_0, \ i = 1, \ldots, n.$$

Sea C un punto arbitrario de $[A, B]$ y

$$\text{proy}_{R0}\, C = (c_1', c_1'', c_2', c_2'', \ldots, c_n', c_n'')$$

En virtud de la definición 3 será:

$$c_j' = \lambda\, a_j' + \mu\, b_j'; \ c_j'' = \lambda\, a_j'' + \mu\, b_j''; \ \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \in k_0; \ 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (8)$$

Sean:

$$\frac{1}{x_i}(x) = a_0^* = a_0^{*\prime} + ia_0^{*\prime\prime}, \ \frac{1}{x_i}(y) = b_0^* = b_0^{*\prime} + ib_0^{*\prime\prime}; \ a_0^{*\prime}, a_0^{*\prime\prime}, b_0^{*\prime}, b_0^{*\prime\prime} \in k_0 \quad (9)$$

$$\frac{x_j}{x_i}(\mathrm{x}) = a_j^* = a_j^{*\prime} + ia_j^{*\prime\prime};\ \frac{x_j}{x_i}(\mathrm{y}) = b_j^* = b_j^{*\prime} + ib_j^{*\prime\prime};\ a_j^{*\prime},\ a_j^{*\prime\prime},\ b_j^{*\prime},\ b_j^{*\prime\prime} \in k_0 \tag{10}$$

Por consiguiente será:

$$\begin{aligned} \mathrm{proy}_{Ri}\, A &= (a_0^{*\prime}, a_0^{*\prime\prime}, a_1^{*\prime}, a_1^{*\prime\prime}, \ldots, a_n^{*\prime}, a_n^{*\prime\prime}) \\ \mathrm{proy}_{Ri}\, B &= (b_0^{*\prime}, b_0^{*\prime\prime}, b_1^{*\prime}, b_1^{*\prime\prime}, \ldots, b_n^{*\prime}, b_n^{*\prime\prime}) \end{aligned}$$

Vamos a calcular las coordenadas de la proyección de C sobre R_i. Para ello sea $\mathrm{z} = \omega^{-1}(C)$, $\mathrm{z} \in X^0$. Esto significa que:

$$x_j(\mathrm{z}) = c_j' + ic_j'', \tag{11}$$

en donde las c_j', c_j'' vienen dadas por las (8). Sean:

$$\frac{1}{x_i}(\mathrm{z}) = c_0^* = c_0^{*\prime} + ic_0^{*\prime\prime},\ \frac{x_j}{x_i}(\mathrm{z}) = c_j^* = c_j^{*\prime} + ic_j^{*\prime\prime} \tag{11'}$$

Entonces será:

$$\mathrm{proy}_{Ri}\, C = (c_0^{*\prime}, c_0^{*\prime\prime}, c_1^{*\prime}, c_1^{*\prime\prime}, \ldots, c_n^{*\prime}, c_n^{*\prime\prime}). \tag{12}$$

Todo se reduce a probar que, para todo $C \in [A, B]$, todas las coordenadas de (12) son números de k_0. Ahora bien, de (11) se deduce:

$$\frac{1}{x_i}(\mathrm{z}) = \frac{1}{x_i(\mathrm{z})} = \frac{1}{c_i' + ic_i''} = \frac{c_i'}{c_i'^2 + c_i''^2} - \frac{c_i''}{c_i'^2 + c_i''^2}\, i$$

de donde:

$$c_0^{*\prime} = \frac{c_i'}{\|c_i\|};\qquad c_0^{*\prime\prime} = -\frac{c_i''}{\|c_i\|}. \tag{12'}$$

De (12') resulta: $\|c_0^*\| = \dfrac{1}{\|c_i\|}$ y, análogamente, $\|a_0^*\| = \dfrac{1}{\|a_i\|}$, $\|b_0^*\| = \dfrac{1}{\|b_i\|}$.

De (9) y de estas últimas relaciones y de (8) se obtiene:

$$\|c_0^*\| = \|a_0^*\| \cdot \|b_0^*\| : [\lambda^2 \|b_0^*\| + \mu^2 \|a_0^*\| + 2\lambda\mu (a_0^{*\prime} b_0^{*\prime} + a_0^{*\prime\prime} b_0^{*\prime\prime})],$$

con lo que (12') se puede escribir del siguiente modo:

$$c_0^{*\prime} = \frac{\lambda a_0^{*\prime} \|b_0^*\| + \mu b_0^{*\prime} \|a_0^*\|}{\lambda^2 \|b_0^*\| + \mu^2 \|a_0^*\| + 2\lambda\mu (a_0^{*\prime} b_0^{*\prime} + a_0^{*\prime\prime} b_0^{*\prime\prime})} \tag{13}$$

$$c_0^{*\prime\prime} = \frac{\lambda a_0^{*\prime\prime} \|b_0^*\| + \mu b_0^{*\prime\prime} \|a_0^*\|}{\lambda^2 \|b_0^*\| + \mu^2 \|a_0^*\| + 2\lambda\mu (a_0^{*\prime} b_0^{*\prime} + a_0^{*\prime\prime} b_0^{*\prime\prime})} \tag{13'}$$

Por otra parte de (10) y (7) se obtienen:

$$a_j' = \frac{a_j^{*\prime} a_0^{*\prime} + a_0^{*\prime\prime} a_j^{*\prime\prime}}{\|a_0^*\|};\qquad a_j'' = \frac{a_0^{*\prime} a_j^{*\prime\prime} - a_0^{*\prime\prime} a_j^{*\prime}}{\|a_0^*\|}; \tag{14}$$

$$\text{y} \qquad b_j' = \frac{b_j^{*\prime}\, b_0^{*\prime} + b_0^{*\prime\prime}\, b_j^{*\prime\prime}}{\|b_0^*\|}; \qquad b_j'' = \frac{b_0^{*\prime}\, b_j^{*\prime\prime} - b_0^{*\prime\prime}\, b_j^{*\prime}}{\|b_0^*\|}; \tag{15}$$

y teniendo en cuenta (11) y (11') resulta:

$$\begin{aligned} c_j^{*\prime} &= d\,[\lambda^2 a_j^{*\prime}\, \|b_0^*\| + \lambda\mu[(a_0^{*\prime\prime}\, b_0^{*\prime} - a_0^{*\prime}\, b_0^{*\prime\prime})\,(a_j^{*\prime\prime} - b_j^{*\prime\prime}) \\ &\quad + (a_0^{*\prime}\, b_0^{*\prime} + a_0^{*\prime\prime}\, b_0^{*\prime\prime})\,(a_j^{*\prime} + b_j^{*\prime})] + \mu^2\, b_j^{*\prime}\, \|a_0^*\|] \\ c_j^{*\prime\prime} &= d\,[\lambda^2 a_j^{*\prime\prime}\, \|b_0^*\| + \lambda\mu[(a_0^{*\prime}\, b_0^{*\prime\prime} - a_0^{*\prime\prime}\, b_0^{*\prime})\,(a_j^{*\prime} - b_j^{*\prime}) \\ &\quad + (a_0^{*\prime}\, b_0^{*\prime} + a_0^{*\prime\prime}\, b_0^{*\prime\prime})\,(a_j^{*\prime\prime} + b_j^{*\prime\prime})] + \mu^2\, b_j^{*\prime\prime}\, \|a_0^*\|] \end{aligned} \tag{16}$$

siendo

$$d = 1 : [\lambda^2\, \|b_0^*\| + \mu^2\, \|a_0^*\| + 2\,\lambda\,\mu\,(a_0^{*\prime}\, b_0^{*\prime} + a_0^{*\prime\prime}\, b_0^{*\prime\prime})]. \tag{17}$$

Por poseer A y B proyecciones sobre R_0 no puede ser $\|a_0^*\| = 0$, ni $\|b_0^*\| = 0$, por consiguiente (17) prueba que para todo (λ, μ) tal que $(\lambda + \mu = 1)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, el denominador de d es distinto de cero. luego (16) representan números de k_0, con la salvedad indicada en el enunciado del Lema.

Definición 4 Los puntos $A_1, \ldots, A_n$ de R se llaman *vértices linealmente independientes*, cuando verifican las dos condiciones siguientes:

1.° Existe un i tal que todos ellos poseen proyección sobre R_i. 2.° Las proyecciones de $A_1, \ldots, A_n$ sobre R_i son linealmente independientes en R_i, siendo i el menor índice tal que todos los puntos $A_1, \ldots, A_n$ posean proyección sobre R_i.

Definición 5. Si $A_0, \ldots, A_n$ son vértices linealmente independientes, se llama simplex n-dimensional de vértices $A_0, \ldots, A_n$, y se representa por $s_n = [A_0, \ldots, A_n]$, al conjunto de todos los puntos P de X^0 tales que $P \in [A_i, Q]$ siendo Q un punto que recorre el simplex $s_{n-1} = [A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_n]$.

De las definiciones 4 y 5 inmediato el siguiente corolario del Lema 3:

Corolario 1. *Si* $A_0. \ldots. A_n$ *poseen proyección sobre* R_i, *todos los puntos* P *del simplex* $[A_0, \ldots, A_n]$ *poseen también proyección sobre* R_i.

Corolario 2. *Si* $P \in [A_0, \ldots, A_m]$ *y* j *es el menor índice para el que* $A_0, \ldots, A_m$ *poseen proyección sobre* R_j, *se verifica que*

$$\mathrm{Proy}_{Rj}\, P = \lambda_0\, \mathrm{Proy}_{Rj}\, A_0 + \ldots + \lambda_m\, \mathrm{Proy}_{Rj}\, A_m,\ \lambda_0 + \ldots + \lambda_m = 1,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1.$$

4. Descomposición simplicial de la variedad de Riemann R.

Sean: $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{a}_i'$, $i = 1, \ldots, 2n$, dos puntos de R tales que $\mathrm{Proy}_{R0}\, \mathbf{a}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ y $\mathrm{Proy}_{R0}\, \mathbf{a}_i' = (0, \ldots, -1, \ldots, 0)$, en donde las coordenadas son todas nulas excepto la i-ésima, que es 1 en el primer caso y -1 en el segundo.

Consideremos los $N = 2^{2n}$ símplices $(2n - 1)$ -dimensionales:

$$s_1 = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{2n}), \ldots, s_N = (\mathbf{a}_1', \ldots, \mathbf{a}_{2n}').$$

La unión de los símplices $2n$-dimensionales:

$$S_i = (\mathbf{0}, s_i); \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

siendo $\mathrm{Proy}_{R0}\, \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, es un entorno del punto $\mathbf{0}$ de R.

Sea $\mathbf{c}$ un punto genérico de s_1:

$$\mathrm{Proy}_{R0}\, \mathbf{c} = (c_1, c_1', \ldots, c_n, c_n'); \quad c_1 + c_1' + \ldots + c_n + c_n' = 1,$$
$$0 \leq c_i \leq 1, \; 0 \leq c_i' \leq 1.$$

Sea $\mathbf{x}$ un punto de R tal que

$$\mathrm{Proy}_{R0}\, \mathbf{x} = (\lambda c_1, \lambda c'_1, \ldots, \lambda c_n, \lambda c_n'), \; 1 \leq \lambda < \infty, \; \lambda \in \mathrm{k}_0$$

Se verifica que

$$\mathrm{Proy}_{Ri}\, \mathbf{x} = \left(\frac{c_i}{\lambda\,(c_i^2 + c_i'^2)}, -\frac{c_i'}{\lambda\,(c_i^2 + c_i'^2)}, \frac{c_1 c_i + c_1' c_i'}{c_i^2 + c_i'^2}, \frac{-c_1 c_i' + c_1' c_i}{c_i^2 + c_i'^2}, \ldots \right)$$
$$= \left(\lambda^* \frac{c_i}{c_i^2 + c_i'^2}, -\lambda^* \frac{c_i'}{c_i^2 + c_i'^2}, \frac{c_1 c_i + c_1' c_i'}{c_i^2 + c_i'^2}, \frac{-c_1 c_i' + c_1' c_i}{c_i^2 + c_i'^2}, \ldots \right)$$
$$0 < \lambda^* \leq 1$$

Definición 6. Llamaremos *simplex 2 n-dimensional de segunda especie*, T, al conjunto de todos los puntos $\mathbf{p}$ de R tales que

$$\mathrm{Proy}_{Ri}\, \mathbf{p} = \left(\lambda^* \frac{c_i}{c_i^2 + c_i'^2}, -\lambda^* \frac{c_i'}{c_i^2 + c_i'^2}, \frac{c_1 c_i + c_1' c_i'}{c_i^2 + c_i'^2}, \frac{-c_1 c_i' + c_1' c_i}{c_i^2 + c_i'^2}, \ldots \right) \quad (18)$$

$$i=1, \ldots, n, \quad 0 \leq \lambda^* \leq 1, \quad c_i^2 + c_i'^2 \neq 0, \quad \mathrm{Prop}_{R0}\, \mathbf{c} = (c_1\, c_1', \ldots) \in s,$$

siendo s un simplex $(2\,n - 1)$-dimensional de R_0. En particular, si tomamos como simplex s el simplex s_i anterior, al simplex definido por (18) lo representaremos por T_i.

Teorema. *El conjunto formado por los símplices* $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_N$, *juntamente con los símplices de segunda especie* $\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_N$, *es una descomposición simplicial de* R.

Demostración. Sea $\mathbf{q}$ un punto arbitrario de R. Pueden ocurrir dos cosas:

1.° Sea $\mathrm{Proy}_{R0}\, \mathbf{q} = (q, q_1', \ldots, q_n, q_n')$.

2.° No existe $\mathrm{Proy}_{R0}\, \mathbf{q}$.

1.° Sea $\lambda = |q_1| + |q_1'| + \ldots + |q_n'|$. Si $\lambda < 1$ el punto $\mathbf{q}$ pertenece a uno de los símplices S_i, $i = 1, \ldots, N$, y sólo a uno si no pertenece a una de sus caras. Si $\lambda > 1$, $\mathbf{q}$ pertenece a un simplex T_i, y sólo a uno si no pertenece a una de sus caras. Finalmente, si $\lambda = 1$, $\mathbf{q}$ pertenece a la cara común a un simplex S_i y un simplex T_i.

2.° Supongamos que exista $\mathrm{Proy}_{Ri}\, \mathbf{q} = (0, 0, q_2, q_2', \ldots, q_n, q_n')$. Las dos primeras coordenadas deben ser nulas, puesto que no existe $\mathrm{Proy}_{R0}\, \mathbf{q}$.

Vamos a determinar un punto **c** de R tal que

$$\mathrm{Proy}_{R0}\ \mathbf{c} = (c_1, c_1', c_2, c_2', \ldots, c_n, c_n')$$

y que se verifique:

$$\frac{c_1 c_i + c_1' c_i'}{c_i^2 + c_i^{2\prime}} = q_2, \qquad \frac{-c_1 c_i' + c_1' c_i}{c_i^2 + c_i^{2\prime}} = q_2', \ldots \tag{19}$$

El sistema (19) es equivalente al siguiente:

$$c_1 = q_2 c_i - q_2' c_i', \quad c_1' = c_i q_2' + c_i' q_2, \ldots \tag{20}$$

Poniendo

$$\overline{q} = (q_2, q_2' q_3, q_3', \ldots, 1, 0, \ldots, q_n, q_n')$$
$$\overline{q'} = (-q_2', q_2, -q_3', q_3, \ldots, 0, 1, \ldots, -q_n', q_n)$$
$$\overline{c} = (c_1, c_1', \ldots, c_i, c_i', \ldots, c_n, c_n')$$

el sistema (20) se puede escribir en la siguiente forma:

$$\overline{c} = c_i \overline{q} + c_i' \overline{q'} + (1 - c_i - c_i') \overline{0},$$

siendo $\overline{0} = (0, \ldots, 0)$, lo que prueba que c pertenece al plano bidimensional de R_0 determinado por los punto $\overline{q}$, $\overline{q'}$, y $\overline{0}$. Si este plano corta a las caras $S\alpha_1, \ldots, S\alpha_r$, de los símplices $T\alpha_1, \ldots, T\alpha_r$ el punto **q** pertenecerá a los bordes de todos estos símplices $T\alpha_1, \ldots, T\alpha_r$ c. q. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Grothendieck. Le langage des schémas. Publications Mathématiques núm. 4. Institute des Hautes Études Scientifiques. París.

[2] B. L. van der Waerden. Moderne Algebra. I. Springer Verlag.